1. Feladat – Kilátó

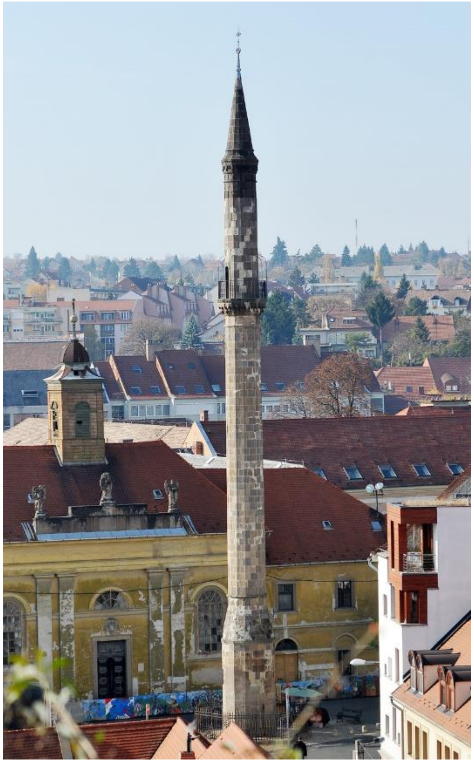
Az alábbi kép egy magyarországi építészeti emléket ábrázol. A kilátószintre szűk csigalépcsősor vezet fel. Barnabás ezen a lépcsőn egyszerre egy, kettő vagy akár három lépcsőfokot is tud lépni.

a) Hány lépcső vezet az erkélyre az építészeti emlék hivatalos weboldala szerint?

b) Az alábbi rekurziók közül melyik összefüggés írja le az *n*-edik lépcsőfokra vezető (n>3) lehetséges lépéssorozatok számát?

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3}$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$
$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$$
$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3}$$
$$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 3a_{n-3}$$
$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$$
$$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

c) Összesen hányféleképpen juthat fel Barnabás a kilátószintre, ha a 60. lépcsőfokig egyesével lépkedett?



Megoldás:

a) 97

b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ (fent ez a második)

c) 3831006429

2.a. Feladat – Szakaszok

Legyenek adottak az $f(x) = |3{,}5 \cdot x - 5|$ és a $g(x) = \sqrt{x-2}$ függvények. Vizsgáljuk meg, hogy hány 1 egységnél hosszabb szakaszt határoznak meg az $f\big(g(x)\big)$ és a $g(f(x))$ összetett függvények (más jelölésekkel: $f \circ g$ $és$ $g \circ f$) görbéi közé zárt egész koordinátájú belső pontok! (A végpontok fordított sorrendjével megadott szakaszokat nem különböztetjük meg!)

Megoldás: 29 szakasz van.

2.b. Feladat – Gömbi pontok

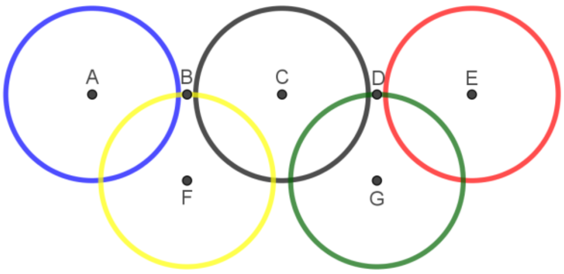
Egy gömb középpontjának koordinátái $K(1;3;2)$, három felszíni pontja közül az $A(4;6;5)$, a $B(x;-2;3)$, $(x \leq 1)$, a $C(4;y;-1)$, $(y \leq 3)$ és a $D(-4;2;z)$, $(z \leq 2)$. Határozzátok meg az $ABCD$ pontok által meghatározott test térfogatát egészre kerekítve!

Megoldás: 48

3. Feladat – Olimpiai kérdés

Mennyi az alábbi minta szerinti körlemezekből felépített olimpiai ötkarika által lefedett összterület? A választ egy tizedesjegy pontossággal adjátok meg!

Az *A*, *B*, *C*, *D* és *E* pontok egy egyenesbe esnek, és bármely két szomszédos pont távolsága 1,1 cm. Az *BF* és *DG* egyenesek merőlegesek az *AB* egyenesre, továbbá mind az öt kör sugara 1 cm.



Megoldás: 13,8.

4. Feladat – Barátság

Nevezzük 2-barátságosnak azokat a számpárokat, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 2-nek pozitív egész kitevős hatványa. (Pl. 2-barátságos számpár a 28 és a 40, mert $(28; 40) = 4$, de nem 2-barátságos számpár a 36 és a 42, mert $(36; 42) = 6 = 3 \cdot 2$.)

Hány olyan $(a; b)$ egész számokból álló számpár van $(1 < a < b < 101)$, ami 2-barátságos?

Megoldás: 1031

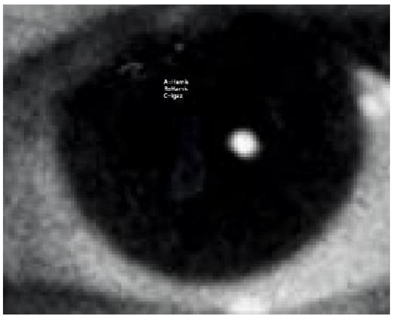
5.a. feladat – Négyzet

Hány olyan négyjegyű természetes szám van, melyet a 11100001 bináris szám decimális alakja után írva, a kapott szám egy természetes szám négyzete lesz?

Megoldás: 3.

5.b. Feladat – Lélek-trükk

Az alábbi képben elrejtettük az A, B és C logikai változók értékét. Nézz mélyen Neumann János szemébe, majd értékeld ki a következő logikai kifejezéseket!



$\mathrm{P} = \neg \mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) \wedge (\neg \mathrm{B} \vee \mathrm{B}) \wedge (\neg \mathrm{C} \wedge \mathrm{C})$

$\mathrm{Q} = \neg \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C}) \vee (\neg \mathrm{B} \wedge \mathrm{B}) \vee (\neg \mathrm{C} \vee \mathrm{C})$

$\mathrm{R} = [\neg A \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee C)] \vee [(\neg B \vee B) \wedge (\neg C \wedge C)]$

A P állítás logikai értéke (I/H):

A Q állítás logikai értéke (I/H):

A R állítás logikai értéke (I/H):

Megoldás:

$\mathrm{P} = \mathrm{hamis}$

$\mathrm{Q} = \mathrm{igaz}$

$\mathrm{R} = \mathrm{igaz}$

6.a. Feladat – Hétköznapok

A következő 100 szenteste közül hány darab esik hétköznapra?

Megoldás: 73

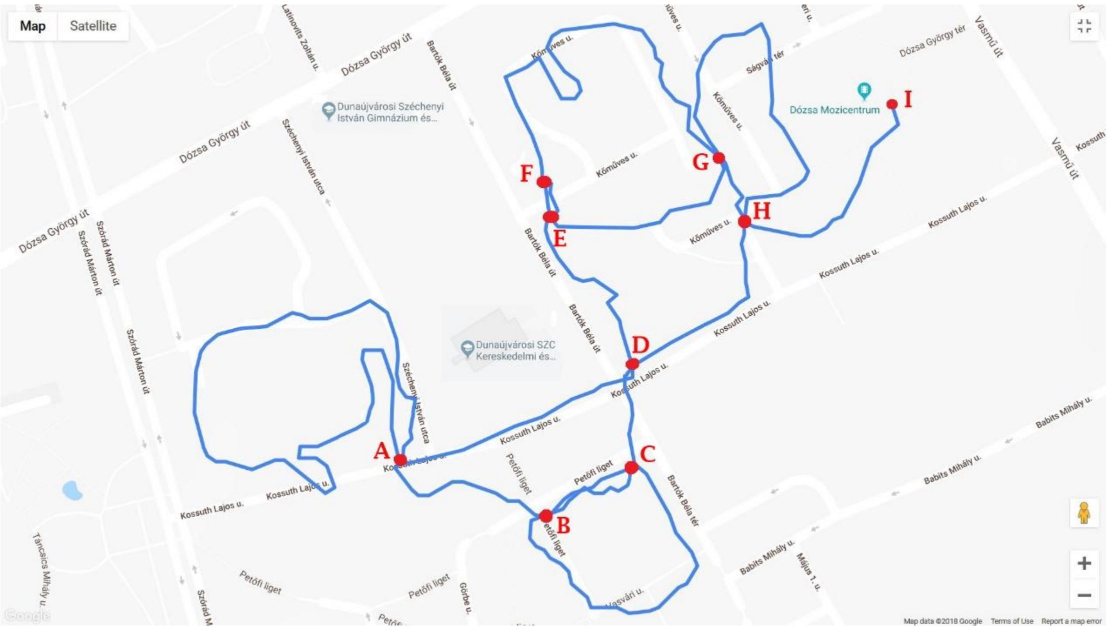
6.b. Feladat – Kasmír

A dunaújvárosi Pista bácsi Kasmír nevű kandúrja furcsa szerzet: minden nap elviszi gazdáját sétálni. Pista bácsi a mobilján futó Endomondo alkalmazással rögzíteni szokta ezeket.

Egyik alkalommal séta közben, mikor Pista bácsi a mozi műsorát nézte, lemerült a telefonja, ezért az alkalmazás csak az alábbi képet mutatta a mobil feltöltése után:

Pesten járván e képet meg is mutatta egy kollégájának, aki előbb egy kicsit nézegette, majd boldogan felkiáltott: Már tudom, hogy pontosan hol laktok!

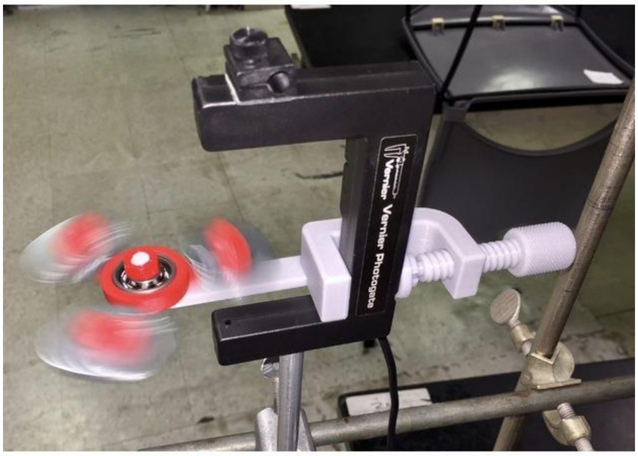
Tényleg, hol laknak Pista bácsiék? Adjátok meg a megfelelő betűt!



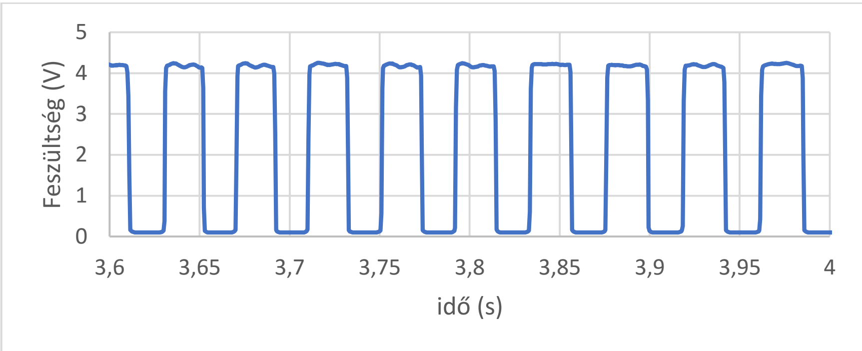
Megoldás: F

7. Feladat - Pörgettyű

Megpörgetünk egy háromkarú Fidget Spinnert egy fotókapu alatt:



Amikor a pörgettyű valamely karja áthalad a kapu alatt, megszakítja az infravörös fény útját, és így az áramkört, ezért a mért kb. 4,2 V feszültség hirtelen kb. 0 V-ra esik. Ha a kar elhaladt (kilép a fényútból), ismét 4,2 V-ot mérhetünk. Mivel az áram szaggatása periodikusan történik, egy ún. négyszögjelet kapunk.



Mellékeltünk egy adatsort amely tartalmazza a mért feszültségeket, és a mérések időpontjait. (5_fidget spinner_adatsor.xlsx)

Határozzátok meg, hogy a teljes mérés során hányszor fordult körbe teljesen a fotókapu alatt a Fidget Spinner!

Megoldás: 16.

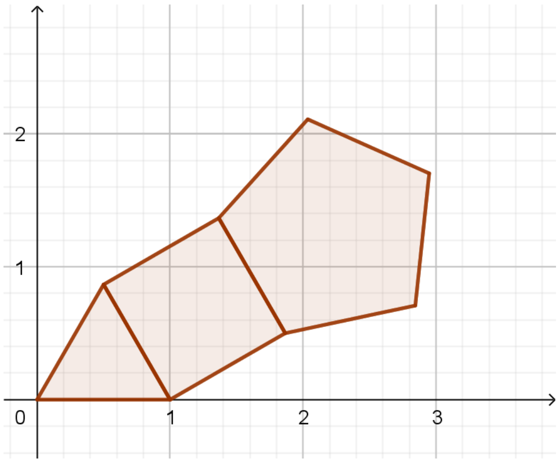
8.a Feladat – Téglalapok

Vegyük azokat a téglalapokat, amelynek két csúcsa az x tengelyre illeszkedik, a másik két csúcsa pedig az $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ függvényre. Legfeljebb mekkora lehet egy ilyen téglalap területe?

Megoldás: 1.

8.b Feladat – Leggyorsabban

Az ábrán látható módon kiindulunk egy egységoldalú szabályos háromszögből, amelynek az origóval szemközti oldalára kifelé egy négyzetet szerkesztünk. Ezután minden további lépésben az előző csatlakozási oldallal szemközti oldalra kifelé szerkesztünk egy eggyel nagyobb oldalszámú szabályos sokszöget. Páros sokszög esetén egyértelmű a szemközti oldal, páratlan esetén a szemközti csúcsból induló bármelyik oldalt választhatjuk. Ezzel a metódussal melyik az a legkisebb *n*, amelyre a szabályos *n*-szög teljes egészében a második síknegyedben van?



Megoldás: 13.

9. Feladat – Képzelt torony

Építsünk egy képzeletbeli várat!

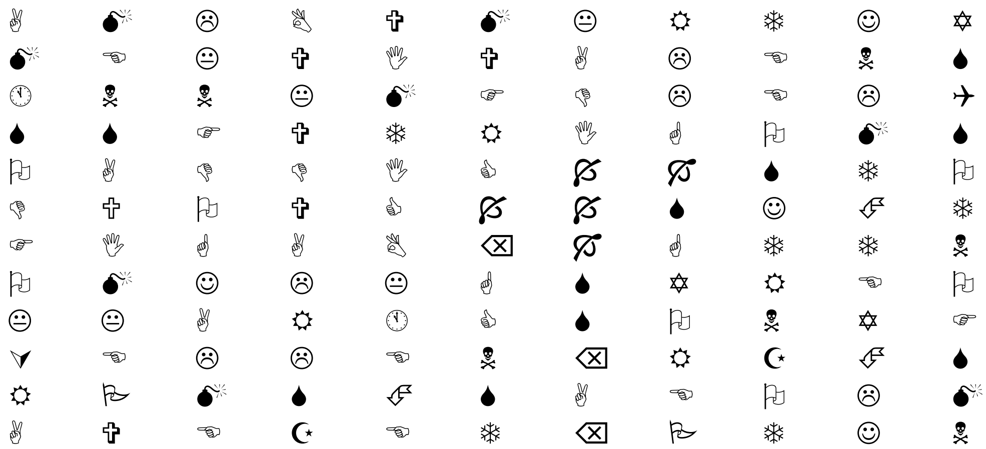
A talajra egy egységkockát helyezünk (1. szint), majd a fedőlap oldalfelező pontjai által meghatározott négyzet fölé ismét kockát emelünk (2. szint). A 3. szinten egy még kisebb kockát helyezünk rá az előzőre szintén úgy, hogy az alapjának négy csúcsa illeszkedjen az előző szintbeli kocka fedőlapjának oldalfelező pontjaira. Így folytatjuk az építkezést tovább. Összesen 2019 kockát helyezünk egymásra.

Mennyi az így épült 20001090 szintes vár felszíne? (Válaszodat egészekre kerekítve add meg!)

Megoldás: 10.

10.a Feladat – Ünnep

Milyen ünnep van elrejtve?



Belső info: Megoldás: (Windings→Calibri (mondjuk))

A	M	L	B	V	M	K	R	T	J	Y
M	E	K	V	I	V	A	L	E	N	S
Á	N	N	K	M	F	D	L	E	L	Q
S	S	F	V	T	R	I	G	O	M	S
O	A	D	D	I	C	Í	Ó	S	T	O
D	U	O	V	C	Í	Í	S	J	É	T
F	I	G	A	B	Ő	Ó	G	T	T	N
O	M	J	L	K	G	S	Y	R	E	O
K	K	A	R	Á	C	S	O	N	Y	F
Ú	E	L	L	E	N	Ő	R	Z	É	S
R	P	M	S	É	S	A	E	O	L	M
A	V	E	Z	E	T	Ő	P	T	J	N

Megoldás: Karácsony

10.b Feladat – Gravitáció

Alább egy ~~antigravitációs~~ helikopterről készült, 1280x720 pixel felbontású, 25 fps sebességű YouTube-videó látható:

https://youtu.be/UKMi8r3vdro

Mekkora a fordulatszáma a helikopter rotorjának, ha tudjuk, hogy annak 250 és 550 1/min közé kell esnie ahhoz, hogy legyen elegendő felhajtóerő, illetve hogy a rotorlapátok vége ne lépje túl a hangsebességet?

A
250 1/min

B
300 1/min

C
350 1/min

D
400 1/min

E
450 1/min

Megoldás:
300 1/min.

11. Feladat – Svindli

Dani és Zoli fordított svindli játékot játszik. Felváltva mondanak egy állítást. Akkor kiált fel valamelyikük, hogy „Svindli!”, ha az állítás igaz. Alább az elhangzott állításokat láthatjátok egyesével. Mindegyik kérdés esetén döntsétek el, hogy igaz vagy hamis, így mondjátok meg, melyik állítás után hangzott el a „Svindli!”?

A) hamis Lefedtem egy kört, két tőle kisebb sugarú körrel.

B) hamis Találtam 2-nek olyan hatványát, mely mind a 10 számjegyből ugyanannyit tartalmazott

C) hamis Meghúztuk egy konvex négyszög két átlóját. A keletkezett négy kis háromszög területének mérőszáma pozitív egész szám. Összeszorozva őket, a szorzat 2018-ra végződik

D) hamis Egy természetes szám prímtényezői között csak a 2, 3 és 7 szerepel. A szám négyzetének négyszer annyi osztója van, mint az eredeti számnak

E) hamis Összeadtam egytől kezdve legalább 40 pozitív egész számot, és ekkor fordult elő legelőször, hogy az összeg három egyforma számjegyből állt

F) hamis 2019 darab papírdarab mindegyikére egy szám van írva. Kiválasztható közülük 46 darab úgy, hogy mindegyiken azonos, vagy mindegyiken különböző szám van írva

G) igaz. Az ABC háromszög AB oldalán van a D pont, mely a beírt kör érintési pontja. Ha a háromszög területe AD·DB, akkor a terület (s-a)·(s-b) alakban is megadható (s=K/2)

12. Feladat –Takarítás

Egy 10 m széles és 20 m hosszú terem takarítására 2 darab speciális távolságszenzorral felszerelt takarítórobotot vásárol az iskola. A takarítórobot távolságszenzora állandóan megméri a teremben lévő két jeladótól mért távolságot. A jeladókat a téglalap alakú terem hosszabbik középvonalán helyezik el a téglalap középpontjától 3 méterre. A takarítórobot programját úgy kódolták, hogy akkor kezd el takarítani, ha az egyik szenzortól mért távolság dupla akkora, mint a másik adótól mért távolság. Ha megtalálta ezt a pozíciót, akkor ezek után úgy irányítja önmagát, hogy ez az arány a mozgása közben is fennmaradjon. A két robot a terem területének hány százalékát takarítja fel, ha tudjuk, hogy a takarítórobot 1 méter átmérőjű körben takarít?

Megoldás: 25%.