

# 2018. első forduló feladatai

## 1. feladat

Hallgassuk meg a YouTube-on Kodály Zoltán Esti dal című művét a King's Singers énekegyüttes előadásában (<https://www.youtube.com/watch?v=F2mIUkCaJwI>), és a PA Tone (vagy hasonló) alkalmazás segítségével állapítsuk meg az első három megszólaló hang frekvenciáját. Legyenek ezek rendre A, B és C. Legyen  $X$  a

$$16\frac{A}{B} + 32\frac{B}{C} + 2$$

kifejezés egészre kerekített értéke.

Melyik szót kezdi el kimondani az  $X$ . másodperc elején az énekes?

megoldás

## A feladat megoldása

$$A=155,2$$

$$B = 232,8$$

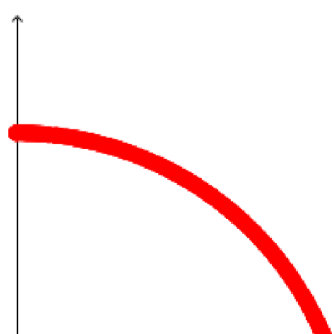
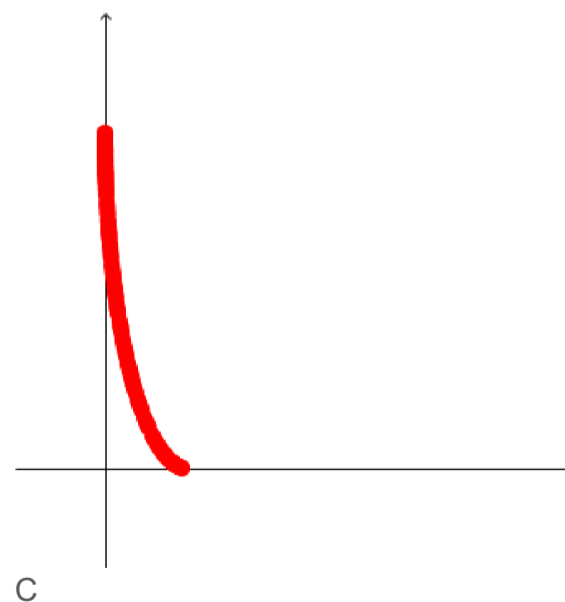
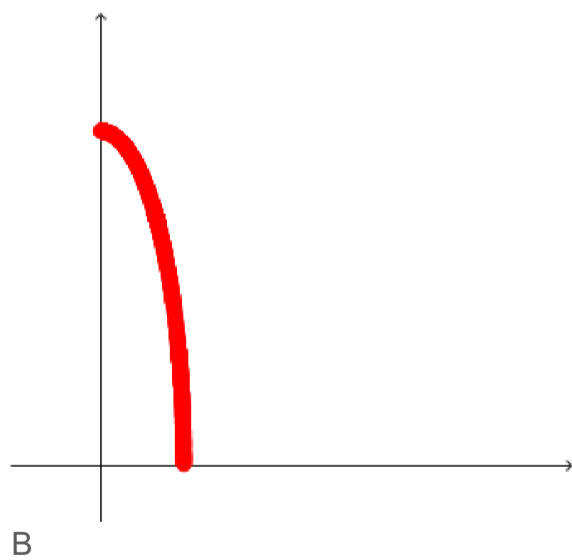
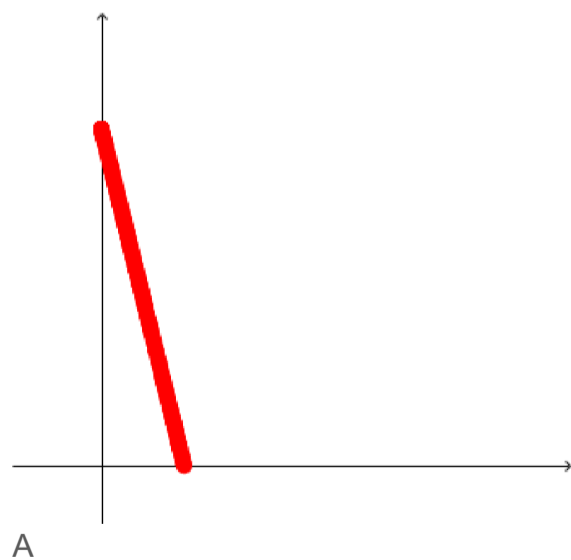
$$C=388$$

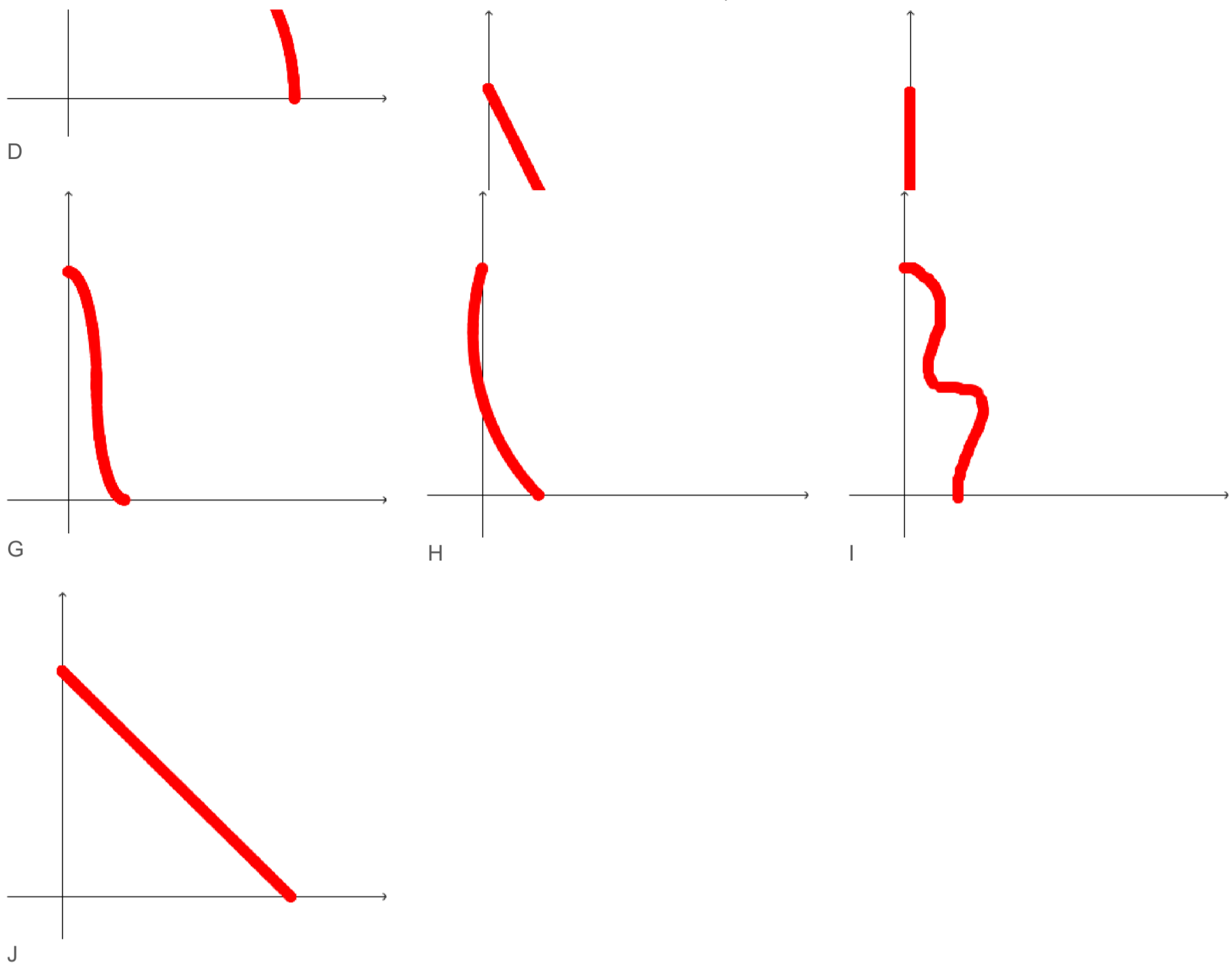
$$X= 32$$

A 32. másodpercben kezdődő szó: „ÖSSZETETTEM”

## 2. feladat

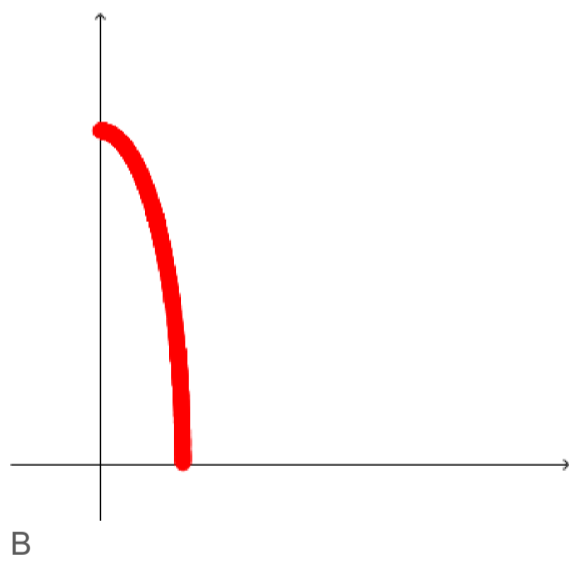
Egy összecsucott esernyőt a nyelével fölfelé a falnak támasztottunk, de az lecsúszott úgy, hogy az egyik vége végig a falat, a másik vége végig a padlót érintette. Válasszuk ki, hogy az alábbiak közül melyik utat járta be az esernyő fogantyújának végpontja, amelyről azt tudjuk, hogy éppen ötödöli az esernyő hosszát?





megoldás

## A feladat megoldása



## 3. feladat

Tekintsük azt a számsorozatot, aminek az első tagja 1, a második 2, majd minden további tagot úgy képzünk, hogy az előző taghoz hozzáadjuk a kettővel korábbi tag háromszorosát. A sorozat első néhány tagja így 1, 2, 5, 11, 26, 59, ...

Hány számjegyből áll a sorozat 100. tagja?

Mi a sorozat 100. tagjának utolsó számjegye?

Mi a sorozat 100. tagjában az ezresek helyén álló számjegy?

megoldás

## A feladat megoldása

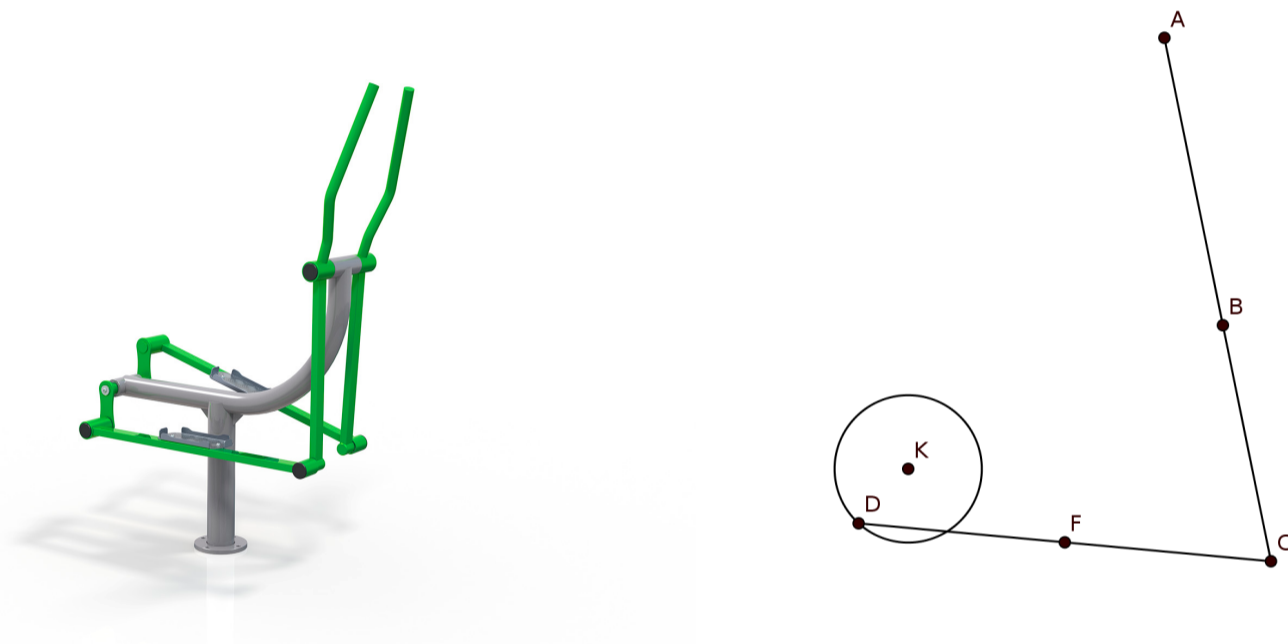
Mindegyik részfeladat megoldása szövegmező kitöltésével adható meg.

Hány számjegyből áll a sorozat 100. tagja?	<b>36</b>
Mi a sorozat 100. tagjának utolsó számjegye?	<b>1</b>
Mi a sorozat 100. tagjában az ezresek helyén álló számjegy?	<b>7</b>

## 4. feladat

Az ábrán látható kültéri fitneszgép működése a következő:

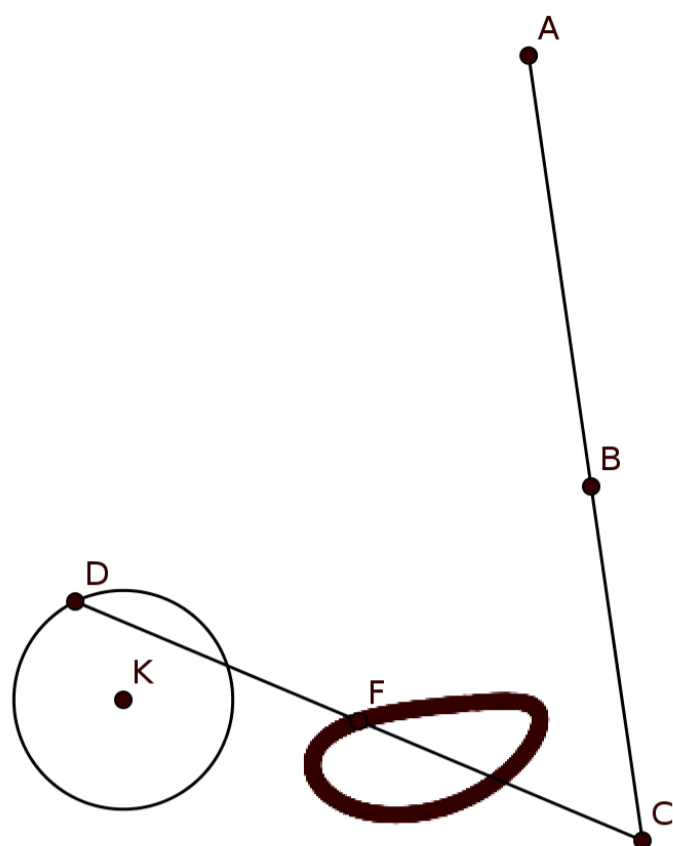
Az AC szakasz állandó hosszúságú és a rögzített B pont körül el tud fordulni, a CD szakasz szintén állandó hosszúságú és egyik végpontja (D) a K középpontú körvonalon mozog körbe. A mozgást végző rááll a CD szakasznak megfelelő lábtartóra, kezével az A pontba fogja a rudakat. A mozgás során milyen alakzaton mozog a CD szakasz F felezőpontja?



Az alábbiak közül válassza ki, milyen alakzaton mozog a CD szakasz F felezőpontja!

megoldás

## A feladat megoldása



Az ábrát pl. Geogebra-val megszerkesztve a következőt kapjuk.

Helyes válasz: más zárt alakzat

Lehetséges válaszok: 9 lehetőség

kör, ellipszis, szakasz, négyzet lekerekített csúcsokkal, kardioid, lemniszkáta, ciklois, asztroid.

## 5. feladat

Számítsa ki a  $2^{70}$  számjegyeinek összegét!

Megoldás: pl excelben

megoldás

## A feladat megoldása

Az eredményt telefonok, számológépek nem jelenítik meg, pontosan. Hasonlóan a táblázatkezelők: 1,18059E+21  
A wolframalpha például pontosan adja  $2^{70}$  értékét.

## 6. feladat

Adél és Béla  $Z$  darab dinnyét szedett le. Adél dinnyéinek  $X$  része sárgadinnye, Béla dinnyéinek  $Y$  része görögdinnye.

$X=0.14$ ,  $Y=0.4$ ,  $Z=100$

Az  $X$  8-as, az  $Y$  9-es és a  $Z$  10-es számrendszerben van megadva.

Hány darab görögdinnyét szedett Adél?

A kapott eredményt 2-es számrendszerben írd az alábbi URL után közvetlenül, szóközök nélkül, nyisd meg egy böngésző program segítségével és megkapod a második kérdést, amelyre még válaszolnod kell!

<https://www.matechverseny.hu/>

megoldás

## A feladat megoldása

Az  $X$  és  $Y$  értékeit könnyen át lehet konvertálni (online konverterek, számítógép, tablet, okostelefon, számológép ...).

$X=3/16$ ,  $Y=4/9$ .

A szövegből az derül ki, hogy az Adél által szedett dinnyék száma 16-nak, a Béla dinnyéinek száma pedig 9-nek a többszöröse. Összegük pedig száz.

Adél	16	32	48	<b>64</b>	80				
Béla	9	18	27	<b>36</b>	45	54	63	72	81

Csak egyetlen lehetőség adódik, Adél 64 dinnyét szedett, Béla pedig 36-ot.

Adél dinnyéi közül 12 sárgadinnye, 52 pedig görög.

Béla dinnyéiből 16 görög, és 20 sárga.

Adél 52 görögdinnyét szedett.

A <https://www.matechverseny.hu/110100> URL alapján megkapjuk a következő kérdést:

Hány sárgadinnyét szedtek ketten?

Ketten együtt 32 sárgadinnyét szedtek össze.

## 7. feladat

Karcsi hét végén a nagyapjához utazott, úgymond nyugodt körülmények között készülni az érettségire, mert otthon éppen felújítás kezdődött. Szombat délután üldögéltek a szobában, mikor a mobil megszólalt, üzenet érkezett. Nagyapja azt is látta, mikor a számítógéphez ült, valamit írt egy papírlapra, majd rövid választ küldött. Karcsi ezután kiment telefonálni. Nagyapja rápillantott az otthagytott papírlapra, majd dolga után nézett. Pár perc múlva Karcsi azt kérdezte tőle, elmehet-e a barátjához, mert komoly tanulnivalója akadt, és kellene a segítség. Ott is aludna, mert sokáig fog tartani. Nagyapa gondolkodás nélkül rávágta, hogy nem. Ezt Karcsi igen furcsállta, mert máskor ez könnyen ment. Mi volt az oka a határozott NEM válasznak? Mi lehetett a papíron?

A papírlapon ez állt:

.....

Karcsi válasza: .....

Karcsi nagy megdöbbenésére, nagyapja (aki volt katona, és a géptávíráskor szolgált) pár perc múlva egy papírt tett elé, és közölte, ha helyesen végzi el azt, ami rá van írva, talán szó lehet mégis a dologról, megtárgyalhatják őszintén ezt a „tanulás” dolgot.

A lapon lévő megoldandó feladat:

.....

Mit válaszolt Karcsi a feladványra?

megoldás

## A feladat megoldása

A szükséges információk könnyen megkereshetők (online keresők). Karcsi barátjával a Morse-abc segítségével kommunikált, hogy mások ne érthessék.

A válaszokat szöveg mezők kitöltésével adják meg a diákok. Egyezés esetén jár a pont. ()

A papírlapon ez állt (Válaszát szóközök nélkül írja be): ESTEBULI

Karcsi válasza (Válaszát szóközök nélkül írja be): RENDBEN

Nagypapa feladványa (Válaszát szóközök nélkül írja be): 34X58+2X23

Karcsi kiszámolta, ez: 2018 vagy ·----- ·----- ·----- ·-----

## 8. feladat

János gazdának a következő GPS koordináta pontok ( $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  szakaszok) határolják a földterületét, amit fel kellene szántani:  $A$  48.240000N, 22.090000E;  $B$  48.239946N, 22.090162E;  $C$  48.240000N, 22.090324E;  $D$  48.240054N, 22.090162E. A terület két legtávolabbi részén lévő háromszög alakú területek erre nem alkalmasak (szikla, fák). Egyik ismerőse, egy 5 méter szélességben szántani tudó ekesorral, a terület átlójával párhuzamosan oda-vissza haladva, egy 10 méter széles sávot fel tudna szántani. A szántás kivitelezhetősége szempontjából, a szomszédos gazdák nem bányák, ha a gazzal benőtt területeik egy része is felszántásra kerül. A terület legnagyobb része tehát ültetésre alkalmas lenne. János gazda a felszántott területen kertészkedni akar, ezért azt (csak a saját földterületének felszántott részét) körbe szeretné keríteni.

Milyen síkidom a földterület?

Adjunk tanácsot, melyik sávban haladjon az ekesor, hogy a körbekerítés a lehető legkevesebbe kerüljön (ha a felszántott terület nagyságára nem vagyunk tekintettel és az átlótól jobbra-balra, még néhány méternyi választási lehetőség van)!

megoldás

## A feladat megoldása

Írja ide, milyen síkidom a földterület! (szöveg mező)

helyes válasz: rombusz (2 pont)

részeredményt elfogadunk: paralelogramma (1 pont)

Adjunk tanácsot, melyik sávban haladjon az ekesor, hogy a körbekerítés a lehető legkevesebbe kerüljön (ha a felszántott terület nagyságára nem vagyunk tekintettel és az átlótól jobbra-balra, még néhány méternyi választási lehetőség van)!

Határozza meg az ábra szerinti  $d_1$  szakasz hosszát!

$d_1$  legördülő menüből: 0-tól 5-ig, 0.1-es lépéssel vagy: mindegy (lent).

Helyes válasz: mindegy. 8 pont.

### Megjegyzések:

A GPS koordinátákból megállapítható (online térkép, kalkulátor, program, GPS, ...), hogy a terület rombusz alakú. A koordinátákból egyébként helymeghatározás nélkül, ránézésre látszik, hogy az átlók merőlegesen metszik és felezik egymást. Megmutatható, hogy a feltételek mellett, mindegy mennyire tér el minimálisan az átlótól a felszántott sáv, a körbekerítés mindig ugyanannyiba kerül. Ehhez azt kell megmutatni, hogy az ábra szerinti  $ABCDEF$  hatszög kerülete állandó. A hatszög nyilvánvalóan tartalmazza a rövidebb átlót, hiszen a terület legnagyobb részének felszántása ezt jelenti.

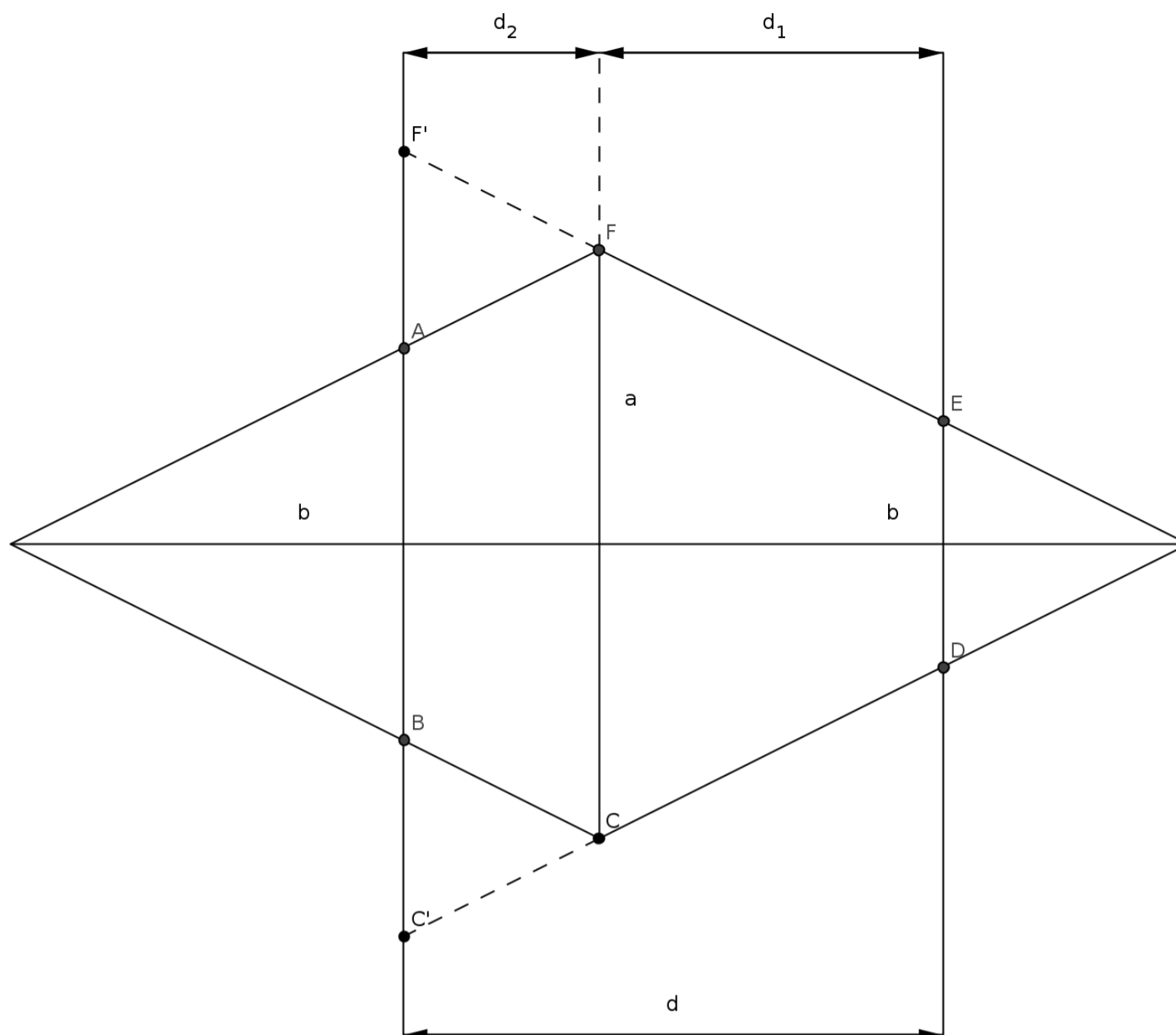
Legyen a rombusz rövidebb átlója  $a$ , a hosszabbik  $2b$ , a szántás szélessége  $d$ . A hatszög kerületén  $BC+CD=DC'$  illetve  $EF+FA=EF'$ . Mivel ezek állandóak, azt kell csak belátni, hogy  $AB+ED$  állandó.

Az ábra jelöléseivel, a megfelelő háromszögek hasonlósága miatt,

$a:AB=b:(b-d_2)$  és hasonló módon  $a:ED=b:(b-d_1)$

Mindezekből,  $AB + ED = \frac{1}{b}(ab - ad_2 + ab - ad_1) = \frac{1}{b}(2ab - ad)$  ami állandó.

A hatszög kerülete tehát, ilyen feltételek mellett állandó, a körbekerítés mindig ugyanannyiba kerül.



## 9. feladat

Az első  $n$  pozitív egész szám összegére könnyen beláthatjuk, hogy  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . A köbszámok összegére ismert, hogy  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ , amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy az első  $n$  pozitív egész szám köböösszegének és összegének hányadosa egész szám. Vizsgáljuk meg, hogy az  $i=2, 4, 5, 6, 7$  esetek közt van-e még olyan kitevő, amelyre a  $K(i) = \frac{(1^i + 2^i + \dots + n^i)}{(1 + 2 + \dots + n)}$

hányados minden pozitív egész  $n$  számra egész! Az  $i=2, 4, 5, 6, 7$  esetek közül válassza ki azokat, melyekre a  $K(i)$  kifejezés értéke egész szám minden  $n$  egész esetén. Írja ezeket a számjegyeket egymás után csökkenő sorrendbe. A kapott szám:

\_\_\_\_\_

megoldás

## A feladat megoldása

Szöveg mező:

A kapott szám: 75

### Megjegyzések:

A megoldás során a <https://www.wolframalpha.com/> oldalról elérhető Wolframalpha programot használjuk. Minden esetben kiszámoljuk az  $(1^i + 2^i + \dots + n^i)/(1 + 2 + \dots + n)$  tört értékét, majd eldöntjük, hogy minden  $n$ -re egész számot kapunk-e.

A megfelelő képernyőmentések:

$i=2$ :


WolframAlpha computational knowledge engine.

(sum  $i^2$ ,  $i=1$  to  $n$ )/( $n*(n+1)/2$ )

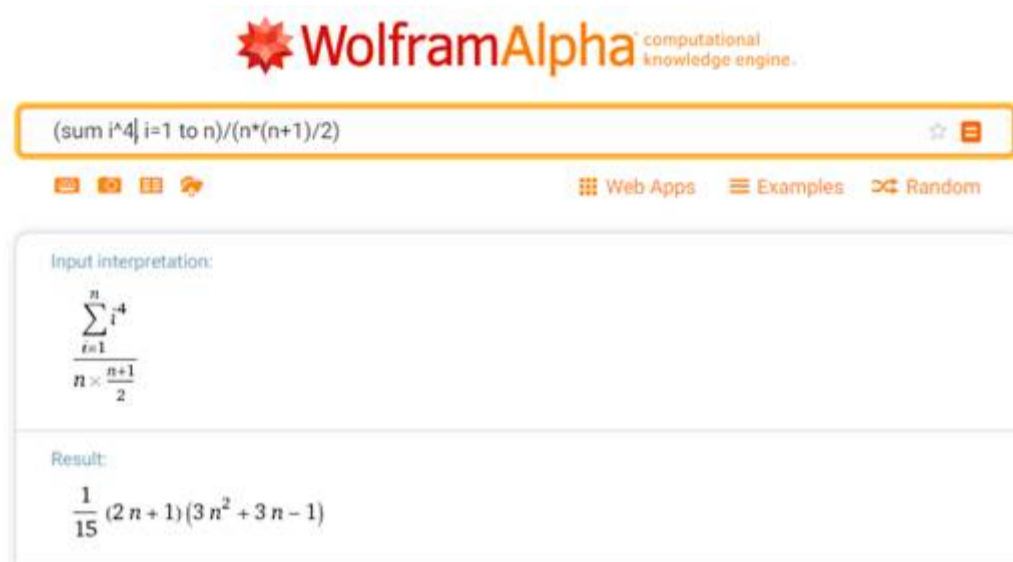
Input interpretation:

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^2}{n \times \frac{n+1}{2}}$$

Result:

$$\frac{1}{3} (2n+1)$$

Láthatjuk, hogy az eredmény nem minden esetben lesz egész szám (pl.  $n=2$  esetén).

 $i=4$ :


WolframAlpha computational knowledge engine.

(sum  $i^4$ ,  $i=1$  to  $n$ )/( $n*(n+1)/2$ )

Input interpretation:

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^4}{n \times \frac{n+1}{2}}$$

Result:

$$\frac{1}{15} (2n+1)(3n^2+3n-1)$$

Láthatjuk, hogy a tört értéke ismét nem minden esetben egész (pl.  $n=2$ ).

 $i=5$ :


WolframAlpha computational knowledge engine.

(sum  $i^5$ ,  $i=1$  to  $n$ )/( $n*(n+1)/2$ )

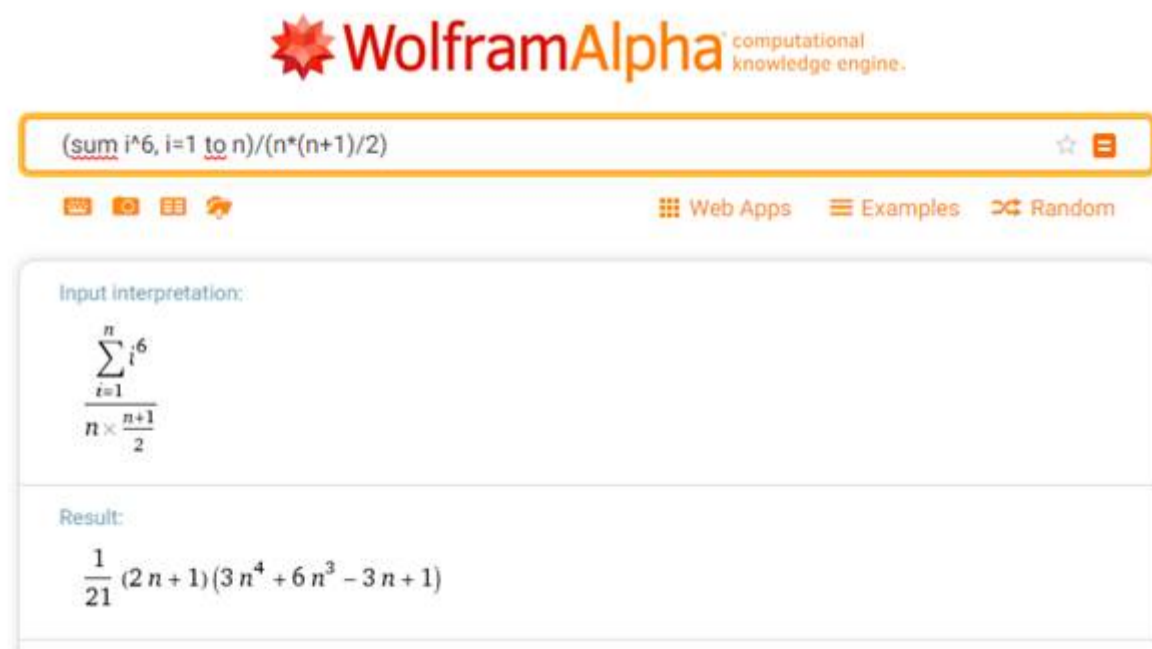
Input interpretation:

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^5}{n \times \frac{n+1}{2}}$$

Result:

$$\frac{1}{6} n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

A hányados minden pozitív egész  $n$  esetén egész szám ( $n$  és  $n+1$  közül valamelyik páros, továbbá ha egyik sem osztható 3-mal, akkor  $n=3k+1$  alakú, ebben az esetben az utolsó tényező osztható 3-mal, így utolsó 3 tényező szorzata osztható 6-tal).

 $i=6$ :


WolframAlpha computational knowledge engine.

(sum  $i^6$ ,  $i=1$  to  $n$ )/( $n*(n+1)/2$ )

Input interpretation:

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^6}{n \times \frac{n+1}{2}}$$

Result:

$$\frac{1}{21} (2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

A hányados nem minden esetben egész szám.

 $i=7$ :





(sum i^7, i=1 to n)/(n\*(n+1)/2)

Input interpretation:

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^7}{n \times \frac{n+1}{2}}$$

Result:

$$\frac{1}{12} n (n+1) (3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$$

A hányados minden esetben egész szám. Valóban, hiszen  $n$  és  $n+1$  közül az egyik páros szám, az utolsó tényező pedig minden esetben páros, így az utolsó 3 tényező szorzata 4-gyel osztható. Osztható 3-mal is, hiszen ha  $n$  vagy  $n+1$  osztható 3-mal, akkor nyilvánvaló, különben pedig  $n=3k+1$  esetén az utolsó tényező osztható 3-mal. Ezek alapján az utolsó 3 tényező szorzata osztható 12-vel, így a hányados egész szám. Megjegyzés: ez a program által adott alábbi válaszból is sejthető:

Values:

$n$	$\frac{1}{12} n (n+1) (3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$
1	1
2	43
3	386
4	1870
5	6455
6	17941
7	42868
8	91596
9	179565
10	328735

Enlarge | Data | Customize | PlainText | Interactive

Válasz:

$i=5$  esetén a hányados:

$$\frac{1}{6} n (n+1) (2n^2 + 2n - 1)$$

$i=7$  esetén a hányados:

$$\frac{1}{12} n (n+1) (3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)$$

Megjegyzés

Attól függően, hogy mennyire szeretnénk nehéz feladatot kapni, a feladat szövegébe az alábbi utalásokat helyezhetjük el:

1. Ötlet: Használhatjuk a <https://www.wolframalpha.com/> oldalról elérhető Wolframalpha programot!
2. Ötlet: A <https://www.wolframalpha.com/> oldalról elérhető Wolframalpha program sum utasítása segítségével számolhatjuk ki összegek zárt alakját!

## 10. feladat

A behelyettesítéses titkosítási módszernél az ABC betűit párosítjuk (behelyettesítő kód). A behelyettesítésnél a betűk pozíciója marad, de a hangértéke nem. Ezek közül legegyszerűbb a Julius Caesarról elnevezett Caesar-kód, melyben a kód ábécé a nyílthoz képest csak el van tolvá.

Melyik magyar matematikus idézete van az alábbiakban Caesar-kóddal kódolva (a kódoláshoz az angol 26 betűs ábécét használjuk, az ékezetes betűket nem ékezetessel helyettesítjük):

„Ykssohur kme app, sgy borgmuz zkxkszkzzks”

A: Erdős Pál

B: Bolyai János

C: Lovász László

D: Neumann János

megoldás

# A feladat megoldása

B

Az idézet: „Semmiből egy ujj, más világot teremtettem”. A szöveg érdekessége, hogy a mai helyesírás szerint az „ujj” helyett „új”-nak kellene szerepelnie, de az eredeti idézet így tartalmazza.

kód	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f
nyít	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

(Mivel az előző feladatnál a válasz egy betű, így programozható, hogy a jól válaszolók tovább mehessenek a következő feladatra.)

Az előbbi feladatban megismert módszerrel kódoljátok az alábbi idézetet:

„Aki azt mondja, nem szereti a matematikát, az tulajdonképpen azt mondja, nem szeret gondolkodni.” (Rényi Alfréd (1921-1970) matematikus)

Megoldás: „Gqo gfz sutjpg, tks yfkxkzo g szzksazoqgz, gf zargpjutqkvvt gfz sutjpg, tks yfkxkz mutjurqufto.”

Megjegyzés:

Online applikáció található hozzá a neten. Ez az összes Caesar-kódot felkínálja.

A diák legördülő menüből választ. A lehetőség az összes szóba jöhető kódolással megadott kód.



Készítette, üzemelteti:

